Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2009 - 2010
Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée : 2h
Prof : MAATALLAH	Le 16 - 11 - 2009	Classe : 4 M

EXERCICE N° 1(7 points)

1/ Démontrer que si z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}$ est réel .

2/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module .

3/ Déterminer tous les nombres complexes z tels que z^2 et z^4 soient des complexes conjugués .

4/ Démontrer , sans chercher à résoudre l'équation , que les solutions de $(z-i)^6-(z-1)^6=0$ ont des parties réelles et imaginaires égales .

5/ Soit A , B et C les points d'affixes respectives i , z et iz . Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que ABC soit un triangle équilatéral .

EXERCICE N° 2(5 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

1/ Soit f l'application de $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $M(z)\longmapsto M'(z')$ tel que $z'=iz+2(1-i)$.

a- Montrer que f est une isométrie du plan .

b- Montrer que f admet un seul point invariant . Caractériser alors f .

2/ Soit g l'application de $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $M(z)\longmapsto M'(z')$ tel que $z'=ie^{i\theta}\bar{z}+2e^{i\theta}(1-i)$.

a- Montrer que g est une isométrie du plan .

b- Soit A et B les points du plan d'affixes respectives $1-i$ et $-2i$ .Déterminer la valeur de θ pour la quelle on a : $g(A)=A$. Calculer pour cette valeur de θ l'affixe du point $g(B)$. Quelle est dans ce cas la nature de g ?

3/ On suppose que $\theta\neq 0$.

a- Montrer que g n'admet aucun point invariant .

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $(1-i)(1-e^{i\theta})$ et I =O∗ $g(O)$. Montrer que $h=t_{\vec{u}}\circ g$ est une isométrie qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=ie^{i\theta}\bar{z}+(1+e^{i\theta})(1-i)$

Prouver que h est la symétrie orthogonale d'axe (AI) .

EXERCICE N° 3(8 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x)=\frac{2sinx}{1-sinx}$ et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe dans un repèreorthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/ Etudier f et tracer $\mathcal{C}_f$.

2/ a- Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $g(0)$, $g(2)$.

b-Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ de g . En déduire la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite $\Delta : y=x$.

c-Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x)=\frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3/ Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=g(U_n)$.

a- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq U_n\leq 2$.

b- Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

4/ Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n=n\left[g\left(U_n+\frac{2}{n}\right)-g\left(U_n+\frac{1}{n}\right)\right]$.

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $c_n\in\left]U_n+\frac{1}{n},U_n+\frac{2}{n}\right[$ tel que $V_n=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

b- En déduire que (V_n) est convergente et donner sa limite.

Bon Travail